



Universidade Federal Fluminense  
Curso: Sistemas de Informação  
Disciplina: Fundamentos Matemáticos para Computação  
Professora: Raquel Bravo

## Lista de Exercícios sobre Recursão e Relação de Recorrência

1. Encontre a fórmula fechada das seguintes relações de recorrência:

(a)

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} \\ a_0 = 3 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n - 1, \text{ para } n \geq 2. \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2^n \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

(e)

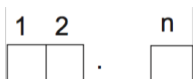
$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2^{(n-1)} \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

(f)

$$\begin{cases} T(n) = 2T(n-1) \\ T(1) = 2 \end{cases}$$

2. Considere  $n$  quadrados dispostos lado a lado, como mostra a figura:

Seja  $a_n$  = número de maneiras de colorir os quadrados de forma que não fiquem dois quadrados vermelhos adjacentes. Encontre uma relação de recorrência para  $a_n$  se cada quadrado pode ser colorido de vermelho ou azul. Justifique.



3. Suponha que uma moeda seja lançada até que apareçam 2 caras, quando o experimento termina.

(a) Seja  $a_n$  o número de experimentos que terminam no  $n$ -ésimo lançamento ou antes. Encontre uma relação de recorrência para  $a_n$ . Justifique.

(b) Calcule a fórmula fechada da relação de recorrência. Justifique.

Observe por exemplo, que  $a_3$  é o número de experimentos que terminam no segundo ou terceiro lançamento, ou seja, é a soma de  $cc$ ,  $cCc$  e  $Ccc$  onde  $c$  significa 'cara' e  $C$  'coroa'.

4. Um certo banco está cobrando 5% de juros ao mês. Tadeu tomou empréstimos 1000 reais, e deve pagar prestações mensais fixas de 100 reais (a primeira ao final do primeiro mês de empréstimo).

(a) Encontre uma relação de recorrência e condições iniciais para a dívida de Tadeu ao final do  $n$ -ésimo mês. Justifique.

(b) Resolva esta relação. Justifique.

5. Considere uma sequência de números inteiros  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  onde  $a_1 = 3$  e cada um dos termos seguintes é obtido pela soma do termo anterior multiplicado por 3 e o número 4.

- (a) Defina esta sequência recursivamente. Justifique.
- (b) Encontre a fórmula fechada para cada termo da sequência pelo método de substituição. Justifique.
6. (a) Seja  $a_n$  o número de maneiras de estacionar carros e micro-ônibus em uma garagem com  $n$  vagas dispostas em uma única fila. Considere que um carro ocupa uma vaga e um micro-ônibus ocupa duas vagas. (Por exemplo, numa garagem com 3 vagas temos 3 maneiras: carro, carro, carro; carro, micro-ônibus; micro-ônibus, carro, logo  $a_3 = 3$ .) Encontre uma relação de recorrência para  $a_n$  e as condições iniciais. Justifique.
- (b) Encontre a fórmula fechada da seguinte relação de recorrência:

$$a_n = a_{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1}, \quad \text{sendo } a_0 = 2$$

7. (1.5) Encontre a fórmula fechada da seguinte relação de recorrência, usando substituição regressiva.

$$a_n = 2a_{n-1} + n2^n \quad \text{para } n \geq 2 \quad \text{sendo } a_1 = 2.$$

Justifique.

8. Em um experimento, uma determinada colônia de bactérias tem uma população inicial de 50.000. A população é contada a cada 2 horas, e ao final do intervalo de 2 horas, a população triplica. Seja  $a_n$  o número de bactérias presentes no início do  $n$ -ésimo período de tempo.
- (a) Deduza a relação de recorrência. Justifique.
- (b) Determine a fórmula fechada da relação de recorrência encontrada em (a). Justifique.
- (c) No início de que intervalo terão 1.350.000 bactérias presentes? Justifique.

9. Determine a fórmula fechada da seguinte relação de recorrência:

$$a_n = 3a_{n-1} - n3^{n-1}, \quad n \geq 2, \quad n \text{ natural}$$

$$a_1 = -1$$

Justifique.